



TITLE:

統計的構造のCompactnessについて (II) (統計的構造)

AUTHOR(S):

草間, 時武

CITATION:

草間, 時武. 統計的構造のCompactnessについて (II) (統計的構造). 数理解析研究所講究録 1972, 150: 71-76

ISSUE DATE:

1972-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106787>

RIGHT:

統計的構造の compactness について (II)

早大理工 草間 時武

§1 序

(I)において Pitcher の統計的構造の compactness についての研究の結果が紹介されたが、本文においては山田作太郎氏と筆者が行った研究 (Pitcher の結果を足がかりとした) の結果を述べる。これは近く論文 (On compactness of the statistical structure and sufficiency) になる予定なので、またその証明は長いものもあるので、ここでは結果のみを述べることにする。

§2 準備

(X, \mathcal{S}, M) を統計的構造とする。すなわち X は集合, \mathcal{S} はその上の σ -field, M は \mathcal{S} 上の確率測度の族とする。 $A \subset X$ に対して外測度 Γ_P^S, Γ_P^T を

$$\Gamma_P^S(A) = \inf_{A \subset B \in \mathcal{S}} P(B)$$

$$\Gamma_P^T(A) = \inf_{A \subset B \in T} P(B)$$

を定義する。ただし T は S の sub- σ -field である。

$K \in \sigma$ -field とする。

$$\forall A \in S \quad \exists B \in K : \Gamma_P^S(A \Delta B) = 0 \quad (\forall P \in M)$$

$$\forall A \in K \quad \exists B \in S : \Gamma_P^S(A \Delta B) = 0 \quad (\forall P \in M)$$

がなりたつとき $S \doteq K$ とかくことにする。

$P(x) = \bigcap_{x \in A \in S} A$ とおく。 $P(x) \in S$ かつ Λ の x につ

いてなりたつとき $S \in A$ -type σ -field という。

$B_\alpha \in S$ ($\alpha \in \mathbb{H}$, \mathbb{H} は任意の濃度をもつ列) ならば

$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{H}} B_\alpha \in S$ のとき $S \in$ complete σ -field という。 S が complete なら A -type であることはあきらかである。

$\{P(x) \mid x \in X\}$ は X の partition となる。これを

$\{A_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ で表す。

$T \in S$ の sub- σ -field とする。 $\hat{T}(S) = \{B \mid \forall P \in M$

$\exists A_P \in T : \Gamma_P^S(A_P \Delta B) = 0\}$ とする。 $\hat{T}(S)$ は σ -field である。

§3 (X, S, M) が compact であるための条件

定理1. $S \in A$ -type, M は discrete な確率測度の族とす。またすべての A_α に対し $P(A_\alpha) > 0$ となる

$P \in M$ が存在するとする。このとき次の(1)~(3)は同値である。

- (1) (X, S, M) は compact
- (2) $S = \widehat{S}(S)$
- (3) S は complete

定理2. 一般連続体假説のもとでは S が A-type ならば

$$S \text{ が complete} \implies (X, S, M) \text{ は compact}$$

$P \in M$ は $P = P_1 + P_2$ (P_1 は discrete な測度, P_2 は $P_2(A_\alpha) = 0$ ($\forall \alpha$) なる測度) と表わされる。

そうすると

定理3. (X, S, M) が compact なら

$$H = \bigcup \{A_\alpha \mid \exists P \in M : P(A_\alpha) > 0\} \text{ とすると}$$

$$\Gamma_{P_2}^S(H) = 0 \text{ が } \forall P \in M \text{ について成り立つ。}$$

したがって S は A-type とする。

§4. Pitcher ~~の~~ open problem.

Pitcher は次の open problem を示している。

- (1) (X, S, M_i) ($i=1, 2$) が compact なら

$(X, \mathcal{S}, M_1 \cup M_2)$ は compact か？

(2) $(X_i, \mathcal{S}_i, M_i)$ ($i=1,2$) が compact なら

$(X_1 \times X_2, \mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2, M_1 \times M_2)$ は compact か？

これについては答は共に No である。

(1) についての反例

平面上で $(C-A) \cup B$ (C は原点から放射される cone, A, B は高々可附番集合) の全体 \mathcal{S} は σ -field であり、また A -type となる。 $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし、 a に対して $P_a \in \mathcal{P}_a(1a) = 1$ なる確率測度とする。 $M = \{P_a \mid a \in R\}$ また $E = (C-A) \cup B$ に対し、(C は cone, A, B は高々可附番集合) ~~集合~~

$$\{(x, y) \mid y=0, x>0\} \subset C \text{ のとき } \hat{P}(E) = 1$$

$$\text{しからざる とき } \hat{P}(E) = 0$$

とすると $(X, \mathcal{S}, \{\hat{P}\})$, (X, \mathcal{S}, M) は共に compact だが $(X, \mathcal{S}, M \cup \{\hat{P}\})$ は compact にならぬことは定理3 を用いて示される。

(2) についての反例.

$X_1 = X_2 = X$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = 2^X$ $M_1 = M_2 (= M)$ は X の discrete な確率測度の全体とする。 $|X| > 2^{\aleph_0}$ と假

定する。 ($|X|$ は X の濃度)。 このとき $(X_i, \mathcal{F}_i, M_i)$ は compact だが (定理 1) $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, M_1 \times M_2)$ は compact にならない。

§3 Sufficiency との関係

定理 4. $T_1(CS)$ は (X, \mathcal{F}, M) に関して pairwise sufficient とする。 $T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{F}, (X, T_2, M)$ は compact とする。 このとき T_2 は (X, \mathcal{F}, M) に関して sufficient である。

系 4.1 (X, \mathcal{F}, M) は compact, $T_1(CS)$ は sufficient, $T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{F}$ ならば $T_2(S)$ は sufficient.

定理 5. (X, \mathcal{F}, M) は compact, $T \subset \mathcal{F}$, T は sufficient とする。 このとき (X, T, M) は compact である。

系 5.1. (X, \mathcal{F}, M) は compact, $T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{F}$, T_1 は pairwise sufficient とする。 このとき,
 T_2 が sufficient $\Leftrightarrow (X, T_2, M)$ が compact

定理6 $\hat{T}(S) \subset S$ となる。

T が (X, S, M) に 1 回 σ sufficient ならば $\hat{T}(T)$, $\hat{T}(S)$ も σ sufficient である。

(注) Baer は定理1の条件のもとに minimal σ -field の存在を示したが、これは定理1により compact となり Pitcher によって compact の場合は minimal σ -field の存在が云えるのである。

また Morimoto は やはり定理1の条件のもとに T_1 が σ sufficient, $T_1 \subset T_2 \subset S$ のとき T_2 が σ sufficient となるのは T_2 が complete のときであることを示している。これは定理1と系5.1 から容易にみちみける。